

文章编号: 1000-8055(2012)11-2534-05

各向异性 Chaboche 黏塑性本构方程隐式 应力积分算法

王庆五¹, 张世辉²

- (1. 华北电力大学 动力工程系, 河北 保定 071003;
2. 华北电力大学 数理系, 河北 保定 071003)

摘 要: 针对各向异性 Chaboche 黏塑性本构方程, 利用有效参数控制法推导了该方程的隐式积分算法, 该算法把所有未知量都用同一个控制参数表示, 并形成控制方程, 从而把本构方程应力积分的问题转化为一个非线性控制方程的求解问题. 该积分算法程序, 与通用有限元软件 Marc 结合, 通过单个单元对单向拉伸、循环、松弛的响应的实验数据进行了数值模拟, 通过与显式算法对比, 该隐式算法的稳定性和收敛性有所提高. 构件的对比分析也表明隐式算法比显式算法具有较高的效率.

关 键 词: 应力积分; Chaboche 方程; 各向异性; 黏塑性本构方程; 隐式; 有效参数控制法
中图分类号: V231.91 **文献标志码:** A

Implicit stress integration algorithm for Chaboche anisotropic viscoplastic constitutive equations

WANG Qing-wu¹, ZHANG Shi-hui²

- (1. Department of Power Engineering,
North China Electric Power University, Baoding Hebei 071003, China;
2. Department of Mathematics & Physics,
North China Electric Power University, Baoding Hebei 071003, China)

Abstract: Chaboche anisotropic viscoplastic constitutive equations were rewritten and the implicit stress integration algorithm was obtained by the governing parameters method. In the algorithm, all the unknowns were expressed by the same parameter which forms a governing equation. Therefore, the problem integrating stress was changed into one solving nonlinear equation. This algorithm procedure was embedded in the finite element program Marc, and the experiment examples of uniaxial tension, cyclic loading and relax mean stress relaxation were simulated on single element. From the comparison of implicit algorithm with the explicit one, the results show improvement in steadiness and convergence. The comparisons conducted on component finite element calculations also show that implicit algorithm has higher efficiency than explicit one.

Key words: stress integration; Chaboche equations; anisotropic;
viscoplastic constitutive equations; implicit;
governing parameter method

收稿日期: 2011-11-14

网络出版地址: <http://www.cnki.net/kcms/detail/11.2297.V.20121115.1028.020.html>

基金项目: 中央高校基本科研业务费专项资金(12QN38)

作者简介: 王庆五(1978—), 男, 湖北襄阳人, 讲师, 博士, 主要研究方向为高温合金本构、高温构件强度.

定向凝固合金和单晶合金在组织结构和力学性能上都是各向异性的,黏塑性本构模型一般建立在各向同性材料上,这些模型不能直接应用于各向异性材料.基于唯象方法人们对这些本构模型进行修正,通过在流动方程、随动硬化等方程中引入 4 阶张量来表现各向异性^[1-3].各向同性本构方程最常用的是欧拉积分方法^[4],但隐式的欧拉算法会使各向异性本构方程的数值积分变复杂,有必要寻求一种有效的积分算法.有关文献中所提出的有效参数控制法 GPM(governing parameters method)对许多问题的求解都是有成效的,这种方法已被应用到塑性、蠕变等多种问题的计算中^[5-8].上世纪七八十年代欧洲的法国宇航局提出了一种统一的本构理论,称 Chaboche 黏塑性统一本构理论.该理论对高温合金承受复杂热、机械载荷下的力学行为方面有独到之处^[9].本文使用有效参数控制法,作为 Chaboche 各向异性黏塑性本构方程应力积分的隐式算法.

1 本构方程应力积分的迭代格式

为简单起见,在 $t, t + \Delta t$ 之间的时间间隔,在下面的式子中采用 $y_n = y(t_n), y_{n+1} = y(t_{n+1})$ 表示方法.各向异性 Chaboche 黏塑性本构方程含有表示方向的 4 阶各向异性张量.

非弹性应变增量为

$$\Delta \varepsilon^i = \frac{3}{2} \Delta \lambda M : (S_{n+1} - \Omega_{n+1}) \quad (1)$$

其中 M 是 4 阶各向异性张量.

$$\Delta \lambda = \left(\frac{\hat{\sigma}_{n+1}}{K} \right)^{n_0} \frac{1}{\hat{\sigma}_{n+1} + R_{n+1} + k} \Delta t \quad (2)$$

$\Delta \lambda$ 是非负标量.并且有

$$\Delta \lambda = \frac{1}{\hat{\sigma}_{n+1} + R_{n+1} + k} \Delta p \quad (3)$$

其中

$$\Delta p = \int_t^{t+\Delta t} \sqrt{\frac{2}{3} M^{-1} : \dot{\varepsilon}^i : \dot{\varepsilon}^i} dt \quad (4)$$

称为累积非弹性应变增量.

$$\hat{\sigma}_{n+1} + R_{n+1} + k =$$

$$\sqrt{\frac{3}{2} M : (S_{n+1} - \Omega_{n+1}) : (S_{n+1} - \Omega_{n+1})} \quad (5)$$

用背应力表示运动硬化,背应力分量 $\Omega^{(k)}$ 的增量表达式可以近似写成

$$\begin{aligned} \Delta \Omega^{(k)} = & \frac{1}{1 + A_1^{(k)}} \left[\frac{2}{3} a_k c_k T_1 : \Delta \varepsilon^i - \right. \\ & c_k \Phi(p_{n+1}) Q_1 : \Omega_n^{(k)} \Delta p - \\ & \left. \beta_k |J(\Omega_{n+1}^{(k)})|^{r_k-1} P_1 : \Omega_n^{(k)} \Delta t \right] \quad (6) \end{aligned}$$

式中 T_1, P_1, Q_1 是 4 阶正交各向异性张量,其中 T_1, Q_1 用来描述塑性的各向异性, P_1 用来描述蠕变的各向异性.

$$A_1^{(k)} = c_k \Delta p Q_1 : + \beta_k |J(\Omega_{n+1}^{(k)})|^{r_k-1} \Delta t P_1 : \quad (7)$$

通常 Ω 取 2 个分量 ($N=2$)

$$\Delta \Omega = \sum_{k=1}^N \Delta \Omega^{(k)} \quad (8)$$

定义 $\Phi(p_{n+1})$ 为各向同性硬化变量对运动变量的影响.

$$\Phi(p_{n+1}) = \Phi_\infty + (1 - \Phi_\infty) e^{-w p_{n+1}} \quad (9)$$

内变量 R 的表达式可以写成

$$R_{n+1} = a_R (b Q \Delta p + R_n) \quad (10)$$

$$a_R = (1 + b \Delta p)^{-1} \quad (11)$$

有效应力偏量的不变量

$$J_{2M}(S - \Omega) = \sqrt{\frac{3}{2} M : (S - \Omega) : (S - \Omega)} \quad (12)$$

方程中 $K, k, n_0, c_k, a_k, \beta_k, r_k, b, Q, w$ 是材料参数.

弹性应力增量和应变增量之间的关系

$$\Delta \sigma = D : (\Delta \varepsilon - \Delta \varepsilon^i) \quad (13)$$

增量形式偏应力偏应变的弹性本构关系

$$\Delta S = D' : \Delta \varepsilon^e \quad (14)$$

式中 D' 是偏应力偏应变关系的 4 阶正交各向异性弹性本构张量, $\Delta \varepsilon^e$ 是 $t + \Delta t$ 时刻的弹性应变增量的偏张量.

$$\Delta S = D' : (\Delta \varepsilon^* - \Delta \varepsilon^i) \quad (15)$$

式中 $\Delta \varepsilon^*$ 是试探应变增量的偏张量.记

$$\Delta S^* = D' : \Delta \varepsilon^* \quad (16)$$

注意到式(15)和式(16),有

$$S_{n+1} = S_n + \Delta S^* - D' : \Delta \varepsilon^i \quad (17)$$

可得

$$\begin{aligned} S_n + \Delta S^* - (\Omega_n + \Delta \Omega) = \\ (S_{n+1} - \Omega_{n+1}) + D' : \Delta \varepsilon^i \end{aligned} \quad (18)$$

于是从式(1)、式(6)和式(18)用隐式算法可得

$$\begin{aligned} \left(I_4 + \frac{3}{2} \Delta \lambda D' : M + T_1 : \sum_k \frac{a_k c_k}{1 + A_1^{(k)}} \Delta \lambda M \right) : \\ (S_{n+1} - \Omega_{n+1}) = \\ S_n + \Delta S^* - \Omega_n + \Phi(p_{n+1}) Q_1 : \sum_k \frac{c_k \Omega_n^{(k)}}{1 + A_1^{(k)}} \Delta p + \\ P_1 : \sum_k \frac{\beta_k |J(\Omega_{n+1}^{(k)})|^{r_k-1} \Omega_n^{(k)}}{1 + A_1^{(k)}} \Delta t \end{aligned} \quad (19)$$

式中 I_4 为 4 阶单位张量。

注意到恒等式

$$\text{tr}(\mathbf{S}_{n+1} - \mathbf{\Omega}_{n+1}) \equiv 0 \tag{20}$$

解出 $(\mathbf{S}_{n+1} - \mathbf{\Omega}_{n+1})$ 后, 利用式 (5) 得到控制方程

$$\begin{aligned} f_{n+1} = M : (\mathbf{S}_{n+1} - \mathbf{\Omega}_{n+1}) : (\mathbf{S}_{n+1} - \mathbf{\Omega}_{n+1}) - \\ \frac{2}{3}(\hat{\sigma}_{n+1} + R_{n+1} + k)^2 = 0 \end{aligned} \tag{21}$$

在 $t + \Delta t$ 时刻应力、应变和内变量必须满足式 (21). 利用式 (10) 和式 (11) 可以用 Δp 表示 R_{n+1} .

利用式 (2) 和式 (3) 求得

$$\hat{\sigma}_{n+1} = K \left(\frac{\Delta p}{\Delta t} \right)^{1/n_0} \tag{22}$$

利用式 (2) 得到

$$\dot{\lambda} = \frac{1}{\hat{\sigma}_{n+1} + R_{n+1} + k} \left(\frac{\hat{\sigma}_{n+1}}{K} \right)^{n_0} \tag{23}$$

再加上已知的量, 式 (21) 可以看作累积非弹性应变增量 Δp 的单自变量的函数, 即

$$f_{n+1} = f_{n+1}(\Delta p) \tag{24}$$

上式称为控制方程, Δp 称为控制参数。

2 有效参数控制法 (GPM)

GPM 方法的主要思想是将本构方程的积分问题转化为求解一个非线性方程, 从而提供一个适用大时间步长的有效计算过程. 如果所有未知量都可以用同一个控制参数表示, 并使用控制参数形成一个控制方程, 求解控制方程得到控制参数, 就能够用得到的控制参数计算所有的未知量, 这就是有效参数控制法。

在这里使用 Δp 作为控制参数, 对形如 $f(x) = 0$ 的非线性控制方程的求解. 对本构方程进行积分的基本过程如图 1 所示, 对给定的应变增量 $\Delta \epsilon$ 和时间步 Δt , 本构方程从时间 $t = t_n$ 的确定状态计算 $t = t_{n+1}$ 的更新状态。

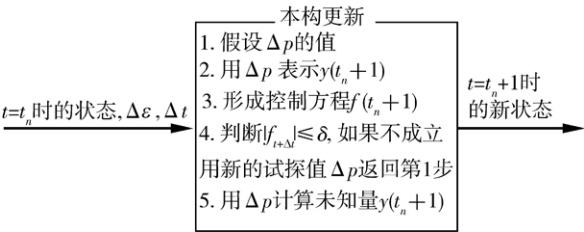


图 1 本构更新

Fig. 1 Status updating

在 t 时刻增量步开始时, 已知的量是 $\epsilon_n, \sigma_n, \epsilon_n^i, \Omega_n(K_n, \Omega_n)$ 和 $\Delta \epsilon$. 需要求解时间步结束时的未知量为 $\sigma_{n+1}, \epsilon_{n+1}^i, \Omega_{n+1}(K_{n+1}, \Omega_{n+1})$. 用控制参数和已知量表达未知量, 控制方程用搜索和迭代法求解^[10-11].

3 计算结果

为了考察隐式积分算法的效果, 将该算法写成子程序集成到 Marc 有限元程序中. 欧拉自适应步长显式积分算法 SAFE (self-adaptive forward euler integration algorithm) 用来作为对比. 显式方法把时间步长 Δt 进一步划分为若干等份, 从 t_n 开始通过这些等份次的显式计算逐次推进到 t_{n+1} 的结果, 而 GPM 法不对 Δt 再划分. 用 1 个单元的有限元模型模拟试件, 表 1 列出了计算项目. 有限元主程序对 2 种算法取相同的步数. DZ125 材料的实验数据和 Chaboche 黏塑性本构方程的材料常数由周天朋给出^[12].

表 1 650℃ 下 DZ125 材料的计算项目的步数及花费时间

Table 1 Step numbers and time needed in calculation items of material DZ125 at 650℃

ϵ	$\dot{\epsilon}/10^{-2} \text{ s}^{-1}$	步数	CPU 时间/s	
			SAFE	GPM
单向拉伸	纵向 1.0	100	0.58	0.44
	纵向 5.0		0.39	0.39
	2.0% 横向 5.0		0.39	0.31
	45°方向 5.0		0.45	0.4
循环硬化	纵向 1.0	832	5.50	4.88
	±0.8% 横向 1.0		6.12	4.98
平均应力松弛	纵向 5.0	960	5.91	5.67
	1.6% 横向 5.0		7.09	5.98

图 2~图 4 展示了 Chaboche 黏塑性本构方程的单向拉伸、循环和松弛的响应. 执行了显式和隐式 2 个不同的流程, 数值结果几乎是相同的, 但总的来说, 有效参数控制法计算花费的时间少一些。

为进一步考察 GPM 算法的效果, 使用具有 2897 个等参单元、18515 个节点的涡轮叶片进行构件计算, 在离心力载荷和位移约束条件下, 取相同步数并达到同样的结果, 整个计算时间采用

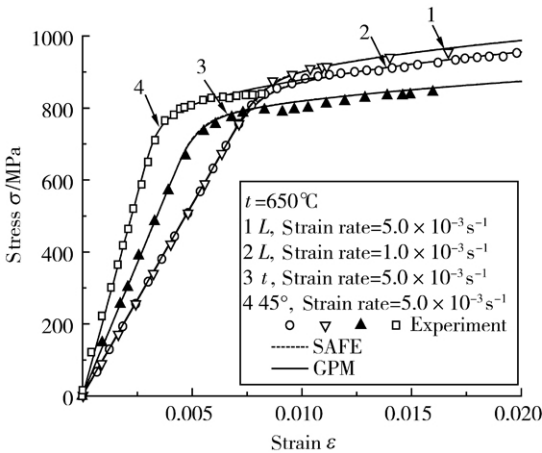


图 2 单向拉伸结果: $\dot{\epsilon}=0.1\% \text{ s}^{-1}$ 和 $0.5\% \text{ s}^{-1}$, $\epsilon=2.0\%$
Fig. 2 Uniaxial tension result: $\dot{\epsilon}=0.1\% \text{ s}^{-1}$
and $0.5\% \text{ s}^{-1}$, $\epsilon=2.0\%$

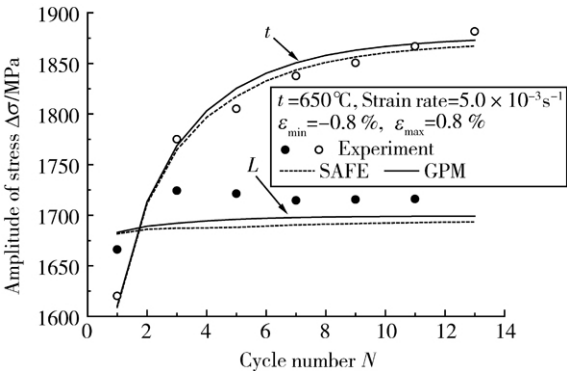


图 3 循环加载结果: $\dot{\epsilon}=5.0 \times 10^{-2} \text{ s}^{-1}$,
 $\epsilon=\pm 0.8\%$, 循环数 13
Fig. 3 Cyclic loading result: $\dot{\epsilon}=5.0 \times 10^{-2} \text{ s}^{-1}$,
 $\epsilon=\pm 0.8\%$, cycle number 13

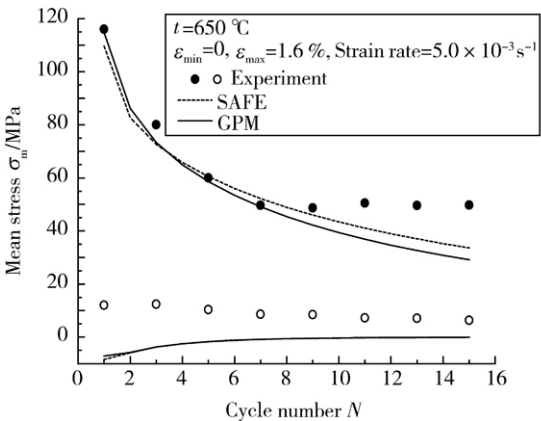


图 4 平均应力松弛结果: $\dot{\epsilon}=5.0 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$,
 $\epsilon=1.6\%$, 循环数 15
Fig. 4 Relax mean stress relaxation result:
 $\dot{\epsilon}=5.0 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$, $\epsilon=1.6\%$,
cycle number 15

SAFE 法平均为 30 个小时左右,采用 GPM 法则平均不到 26 个小时,节约计算时间 13% 以上,显示了 GPM 法整体上的效率.

4 结 论

通过有限元中单个单元对单向拉伸、循环和松弛的响应的模拟,隐式算法比显式算法表现出了较高的效率,而构件的对比分析也证实了这一结论.进一步将该隐式积分算法与显式欧拉算法相比,在各种情况下,隐式积分算法的稳定性、准确性和收敛性(速度)都有较大提高,这说明编写该隐式算法是成功的.

参考文献:

[1] Swanson G A, Liask I, Missley D M, et al. Life prediction and constitutive models for engine hot section anisotropic materials program[R]. NASA-CR-174952, 1986.

[2] Swanson G A, Liask I, Missley D M, et al. Life prediction and constitutive models for engine hot section anisotropic materials[R]. NASA-CR-179594, 1987.

[3] 周柏卓. 各向异性高温涡轮叶片材料本构关系研究[D]. 北京: 北京航空航天大学, 1999.

ZHOU Baizhuo. A research of constitutive relationships for hot section anisotropic materials[D]. Beijing: Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 1999. (in Chinese)

[4] 王庆五, 杨晓光, 石多奇. IN738LC 材料 Chaboche 热粘塑性本构隐式 Euler 格式[J]. 航空动力学报, 2005, 20(6): 964-968.

WANG Qingwu, YANG Xiaoguang, SHI Duoqi. Implicit Euler form of Chaboche thermal viscoplastic model of IN738LC materia[J]. Journal of Aerospace Power, 2005, 20(6): 964-968. (in Chinese)

[5] Kojic M, Bathe K J. Thermo-elastic-plastic and creep analysis of shell structures[J]. Computers & Structures, 1987, 26(1): 135-143.

[6] Kojic M. An implicit procedure for stress integration of general anisotropic Von Mises material[C] // COMPLAS III. Swansea UK: Pineridge Press, 1992: 263-269.

[7] Kojic M, Slavkovic R, Grujovic N, et al. Implicit stress integration algorithm for the modified cam-clay material[J]. Theoretical and Applied Mechanics, 1994, 20(3): 95-118.

[8] Kojic M, Grujovic N, Slavkovic R, et al. A general orthotropic Von Mises plasticity material model with mixed hardening: model definition and implicit stress integration procedure[J]. Journal of Applied Mechanics, 1996, 63(2): 376-382.

[9] Chaboche J L. Constitutive equations for cyclic plasticity and cyclic viscoplasticity[J]. International Journal of Plasticity, 1989, 5(3): 247-302.

[10] 张喆, 薛雷. 一种非线性方程求根的新算法[J]. 计算机工

程与应用,2004(4):61-62.

ZHANG Zhe,XUE Lei. A new algorithm of searching root of nonlinear equation[J]. Computer Engineering and Applications,2004(4):61-62. (in Chinese)

[11] 吴新元. 对牛顿迭代法的一个重要重要修改[J]. 应用数学和力学,1999,20(8):863-866.

WU Xinyuan. A significant improvement on Newton iterative method [J]. Applied Mathematics and Mechanics, 1999,20(8):863-866. (in Chinese)

[12] 周天朋. 定向凝固涡轮叶片先进应力应变分析方法及低循环疲劳寿命研究[D]. 北京:北京航空航天大学,2007.

ZHOU Tianpeng. Sophisticated stress-strain analysis approaches on directionally solidified superalloy blades and low-cycle fatigue life research[D]. Beijing: Beijing University of Aeronautics and Astronautics,2007. (in Chinese)